

# Structure d'écoulement et transfert de chaleur par convection naturelle au voisinage du maximum de densité

R. BENNACER, L. Y. SUN, Y. TOGUYENI, D. GOBIN et C. BENARD

Laboratoire FAST-UA 871, Université Paris VI-CNRS-Université Paris-Sud,  
Campus Universitaire, Bât. 502. 91405, Orsay, France

(Reçu le 29 mai 1992 et sous forme finale le 27 septembre 1992)

**Résumé**—Cette étude concerne la convection naturelle thermique dans l'eau et les solutions salines. Ces fluides présentent un maximum de densité dans le domaine de température considéré, et l'analyse des résultats expérimentaux et numériques montre que la variation non-linéaire de la densité dans le terme moteur influe sur la structure d'écoulement et sur le transfert de chaleur par convection naturelle. L'écoulement est visualisé par des techniques classiques (injection de colorant, tomographie laser) adaptées pour permettre d'observer l'effet de forces d'Archimède de très faible intensité : on montre que le maximum de densité crée une structure complexe de deux cellules contrarotatives d'importance inégale. Le problème est résolu numériquement par une méthode de volumes finis et le bon accord avec les visualisations permet une étude paramétrique sur la base des simulations numériques. L'étude du transfert d'énergie permet d'établir une corrélation générale, utilisable pour le cas où la variation de densité est linéaire ou non-linéaire.

## 1. INTRODUCTION

CES TRENTE dernières années, d'importants efforts de recherche ont concerné l'étude numérique, théorique ou expérimentale de la convection naturelle d'un fluide dans une enceinte différentiellement chauffée. Dans leur grande majorité, ces études supposent que la densité du fluide varie linéairement avec la température (Bejan [1]). Toutefois, des fluides comme le bismuth liquide, l'antimoine, le gallium, le tellurium (Grant [2]), l'eau et beaucoup de solutions aqueuses présentent un maximum de densité. Cette propriété est de grande importance pour l'eau et les solutions aqueuses puisque le maximum de densité à la pression atmosphérique se produit dans un domaine de température fréquemment rencontré dans la nature (lacs, océans, fonte des icebergs) et dans divers processus de fusion et de solidification.

Parmi les études consacrées à la convection naturelle de l'eau au voisinage de son maximum de densité, celle de Watson [3] vérifie par le calcul l'influence sur l'écoulement des hypothèses suivantes :

- viscosité constante ;
- approximation de Boussinesq.

Cette étude a montré qu'une formulation rigoureuse de la variation de la densité de l'eau avec la température permet de prédire un écoulement bicellulaire, contrairement à ce que donne l'approximation de Boussinesq (écoulement monocellulaire).

Seki *et al.* [4] ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet du maximum de densité de l'eau sur la convection naturelle stationnaire, dans une enceinte parallélépipédique différentiellement chauffée par deux parois verticales. Une des parois est maintenue à la température  $T_2 = 0^\circ\text{C}$  et la température de l'autre paroi ( $T_1$ ) varie de  $1^\circ\text{C}$  à  $12^\circ\text{C}$ . Ce travail fait apparaître l'influence du rapport de forme et de la différence  $T_1 - T_2$  sur le nombre de Nusselt moyen.

Inaba et Fukuda [5] ont mené une étude numérique et expérimentale sur la convection dans l'eau autour de  $4^\circ\text{C}$ , dans une cellule parallélépipédique inclinée et différentiellement chauffée. Les résultats montrent que les échanges de chaleur (nombre de Nusselt moyen) dépendent non seulement du rapport de forme et de la différence de température entre parois chaude et froide, mais aussi de l'inclinaison de la cellule.

Plus récemment, les travaux numériques de Lin et Nansteel (dans un espace annulaire vertical [6] et dans une cavité rectangulaire [7]) et celle de Spatz *et al.* [8] retiennent pour la densité de l'eau une expression de la forme :

$$\rho(T) = \rho_M(1 - \gamma|T - T_M|^q). \quad (1)$$

La bibliographie fournit d'autres approximations de la variation de la densité de l'eau au voisinage du maximum : Robillard et Vasseur [9], Lankford et Bejan [10], Nansteel *et al.* [11], Ivey et Hamblin [12] ont retenu une approximation parabolique pour la variation de  $\rho$  ( $q = 2$  dans l'expression (1)). Dans une étude sur la convection naturelle transitoire de l'eau initialement à une température homogène supérieure à  $4^\circ\text{C}$  et refroidie en imposant une température

† An English version of this paper is available. It may be requested from D. Gobin.

## NOTATIONS

$a_i(b_i)$	coefficients phénoménologiques pour la densité équations (2), (3)	$V$	vitesse adimensionnée
$A(\delta)$	fonction d'atténuation (équation 9)	$x(z)$	coordonnée adimensionnée, $x^*/H(z^*/H)$ .
$C$	concentration		
$g$	accélération de la pesanteur	Symboles grecs	
$h$	hauteur de cellule	$\alpha$	diffusivité thermique
$H(L)$	hauteur (largeur) de la cavité	$\beta$	coefficient d'expansion thermique
$\mathbf{i}(\mathbf{k})$	vecteur unitaire dans la direction horizontale (verticale)	$\gamma$	coefficient phénoménologique (équation 1)
$K$	conductivité thermique du fluide	$\delta$	rapport des écarts de température de part et d'autre du maximum (équation 7)
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen (flux de chaleur adimensionné: flux de référence, $K\Delta T/H$ )	$\Delta T_1$	différence de température du côté chaud, $T_1 - T_M$
$P$	pression adimensionnée	$\Delta T_2$	différence de température du côté froid, $T_M - T_2$
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu/\alpha$	$\Delta T_{\max}$	$\max(\Delta T_1, \Delta T_2)$
$Ra$	nombre de Rayleigh, $gH^3\beta\Delta T/\alpha\nu$	$\Delta T_{\min}$	$\min(\Delta T_2, \Delta T_1)$
$Ra^*$	nombre de Rayleigh (zone d'inversion), $g^*H^3(\Delta T_{\max})^2/\alpha\nu$	$\theta$	température adimensionnée, $(T - T_2)/(T_1 - T_2)$
$T$	température	$\nu$	viscosité cinématique
$T_1(T_2)$	température de la paroi verticale chaude (froide)	$\rho$	densité du fluide
$T_M$	température du maximum de densité	$\rho_M$	densité maximale du fluide
$u(w)$	composante horizontale (vert.) de la vitesse adimensionnée	$\rho_R$	densité de référence
$\mathbf{v}^*$	vitesse dimensionnelle	$\rho_0(T)$	densité de l'eau pure
		$\rho_c(T)$	densité de la solution pour une fraction massique $C$ de soluté.

uniforme de  $\theta$  C sur toutes les parois de l'enceinte, Vasseur et Robillard [13] ont utilisé l'expression suivante :

$$\rho^{-1}(T) = \rho^{-1}(0)(1 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3 + a_4T^4). \quad (2)$$

En ce qui concerne les solutions aqueuses, la température du maximum de densité  $T_M$  dépend à la fois de la nature du soluté et de sa concentration. Pour un soluté donné, la température du maximum de densité est d'autant plus basse que la concentration est élevée (voir Greisman [14] et Sun *et al.* [15]). La présence de ce maximum est particulièrement importante lors de la fusion ou de la solidification de solutions aqueuses diluées (concentration inférieure à  $10^{-2}$ ). En effet, dans de telles situations, le fluide peut subir l'effet du maximum de densité dans la gamme de température considérée: si les températures de parois encadrent  $T_M$ , le changement de signe du terme de poussée d'Archimède dans le fluide aura une influence sur la structure de l'écoulement et sur l'échange de chaleur à l'interface.

Enfin, si beaucoup de travaux ont concerné le cas de l'eau (voir aussi Braga et Viskanta [16]), on constate que les études de convection naturelle dans les solutions aqueuses pour cette zone de température sont moins nombreuses (Gebhart et Mollendorf [17], Josberger et Martin [18]). Le présent travail concerne l'étude expérimentale et numérique de la convec-

tion naturelle, dans une enceinte différentiellement chauffée avec comme fluide de travail soit de l'eau, soit une solution aqueuse de carbonate de sodium ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ), au voisinage du maximum de densité.

Dans la section suivante, nous décrivons le montage expérimental utilisé et les résultats d'observations. Ces résultats sont ensuite comparés aux résultats des simulations numériques. Nous déterminons enfin les paramètres régissant la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur dans l'enceinte.

## 2. EXPERIENCE

Le montage expérimental utilisé pour cette étude est constitué de l'enceinte parallélépipédique représentée sur la Fig. 1: deux échangeurs de chaleur parallèles et verticaux (0.6 m de longueur et 0.2 m de hauteur) sont maintenus à des températures uniformes et constantes,  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_M > T_2$ . La distance  $L$  séparant les deux échangeurs est de 0.07 m. Les quatre autres parois de l'enceinte, en plexiglass transparent, sont isolées et supposées adiabatiques.

Les observations se font à travers une des parois verticales en plexiglass. La bonne régulation en température des échangeurs, ainsi que l'isolation thermique de l'enceinte, assurent une précision de 0.15 C et une stabilité à 0.2 C près des températures dans la cellule. Les températures sont mesurées à l'aide de thermocouples NiCr-NiAl (type K) disposés dans les

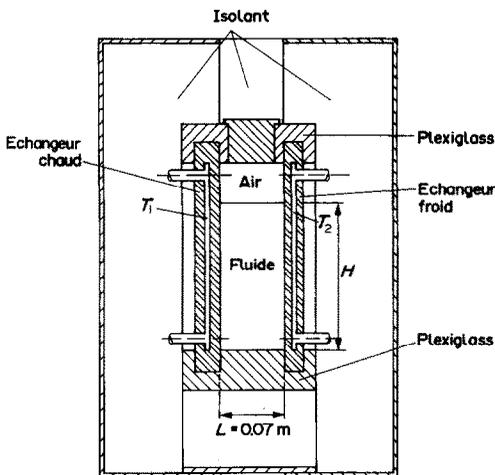


FIG. 1. Plan d'observation du montage expérimental.

parois de l'échangeur. Un thermocouple supplémentaire est introduit dans une aiguille creuse (diamètre extérieur  $0.9 \times 10^{-3}$  m) de telle sorte que la soudure du thermocouple soit en contact avec le fluide au niveau de la tête de l'aiguille: celle-ci peut être déplacée et positionnée à l'intérieur du fluide avec une bonne précision ( $0.5 \times 10^{-3}$  m), ce qui permet de mesurer la température en tout point de la cavité.

Du point de vue expérimental, la difficulté de visualiser la structure de l'écoulement provient du fait que les forces d'Archimède qui sont à l'origine du mouvement sont faibles: des différences de température de quelques degrés induisent des variations relatives de  $\rho$  ( $\Delta\rho/\rho$ ) de l'ordre de  $10^{-4}$  seulement. Par conséquent, la technique de visualisation des lignes de courant doit être bien maîtrisée afin de perturber le moins possible l'écoulement. Pour ce faire, la visualisation est réalisée par deux méthodes différentes:

- par injection dans l'écoulement d'une solution de fluorescéine fortement diluée (fraction massique  $\approx 10^{-5}$ ) à très faible vitesse ( $1.3 \times 10^{-3}$  m s $^{-1}$ ) à l'aide d'une aiguille de diamètre extérieur  $0.6 \times 10^{-3}$  m;
- par tomographie laser dans un plan vertical perpendiculaire aux échangeurs.

L'ensemencement est réalisé avec des particules d'alumine ( $\varnothing \approx 10^{-5}$  m) ou d'aluminium ( $\varnothing \approx 5 \times 10^{-5}$  m).

La coïncidence entre les lignes de courant du fluide, visualisées par le colorant d'une part, et par les particules d'autre part, a été vérifiée à l'aide d'une série d'expériences de convection naturelle (températures de parois  $T_1 = 20.5 \pm 0.2^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 15.4 \pm 0.2^\circ\text{C}$ ) où la densité du fluide varie linéairement. Ces conditions correspondent à un nombre de Rayleigh de  $3 \times 10^8$  (pour une hauteur de liquide  $H = 0.17$  m) et deux petites recirculations symétriques prennent place, dans la partie inertielle des couches limites verticales: la possibilité d'observer ces faibles écoulements sans détruire leur symétrie a été le test qui nous a permis

d'affirmer que les forces d'Archimède dues à la densité du colorant injecté sont négligeables.

L'étude de la convection au voisinage du maximum de densité s'appuie sur six séries d'expériences (dont cinq avec l'eau pure, et une avec une solution aqueuse de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  de fraction massique  $0.5 \times 10^{-2}$ ). Les conditions imposées aux frontières sont regroupées dans le Tableau 1. Dans les cinq premières expériences, la hauteur de liquide  $H$  est de 0.14 m et les observations sont faites à l'état stationnaire. Les visualisations correspondant aux expériences a à d sont représentées sur les Figs. 2(a)–(d). Dans toutes les expériences, deux cellules contrarotatives sont observées: le fluide est ascendant le long des parois chaude et froide, puisque la densité y est plus faible que dans le reste de la cellule. Les deux écoulements ainsi créés se rencontrent à une hauteur qui dépend de l'importance relative des forces d'Archimède de part et d'autre du maximum et pénètrent à l'intérieur de la cavité pour se refermer en deux cellules distinctes. Comme la variation de densité est approximativement symétrique par rapport au maximum  $T_M$ , la cellule la plus large apparaît du côté où l'écart de température à  $T_M$  est le plus important. Ceci apparaît clairement sur les Figs. 2(a)–(c): l'écart de température du côté chaud  $T_1 - T_M$  est gardé constant ( $\approx 2^\circ\text{C}$ ) dans les trois expériences, mais  $T_M - T_2$  décroît de  $3.8^\circ\text{C}$  (Fig. 2(a)) à  $2.0^\circ\text{C}$  (Fig. 2(c)). On constate que la taille relative de la cellule chaude (à gauche) croît et que l'écoulement est symétrique (expérience c) quand  $\rho(T_M) - \rho(T_1) \approx \rho(T_M) - \rho(T_2)$ .

Une caractéristique intéressante de ce système est la grande sensibilité de l'écoulement à la position de la température du maximum de densité: la différence sur la température froide ( $T_2$ ) est seulement de  $0.5^\circ\text{C}$  entre les expériences b et c (15% sur  $\Delta T_2/\Delta T_1$ ) et les écoulements sont radicalement différents. La situation où les deux cellules sont symétriques est d'ailleurs délicate à obtenir expérimentalement et permet de fournir une indication sur le contrôle des températures de parois.

L'influence de la concentration de soluté sur la température du maximum de densité,  $T_M$ , peut être observée en comparant les Figs. 2(a) et (d): pour des conditions expérimentales identiques, la taille respective des cellules est complètement différente. On peut déduire de ces observations que des structures d'écoulement très complexes prendront naissance quand une solution aqueuse sera soumise simultanément à un gradient de température et à un gradient de concentration.

### 3. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS NUMERIQUES

Le modèle mathématique utilisé pour la simulation du problème bidimensionnel s'appuie sur la plupart des hypothèses classiques: le fluide est supposé incompressible et avoir un comportement conforme aux approximations de Boussinesq pour les termes autres

Tableau 1. Conditions limites des expériences réalisées. a, b, c, e et f: eau pure,  $T_M = 3.98^\circ\text{C}$ ; d: solution  $C(\text{Na}_2\text{CO}_3) = 0.5\%$  masse,  $T_M = 2.63^\circ\text{C}$ 

Expérience	$T_1$ ( $^\circ\text{C}$ ) Paroi chaude	$T_2$ ( $^\circ\text{C}$ ) Paroi froide	$Ra^*$	$\delta$
a	$6.2 \pm 0.2$	$0.2 \pm 0.2$	$1.537 \times 10^7$	0.58
b	$6.0 \pm 0.2$	$1.5 \pm 0.2$	$5.592 \times 10^6$	0.89
c	$6.0 \pm 0.2$	$2.0 \pm 0.2$	$4.389 \times 10^6$	0.98
d	$6.2 \pm 0.2$	$0.1 \pm 0.2$	$1.371 \times 10^7$	0.68
e	$8.8 \pm 0.2$	$0.0 \pm 0.2$	$2.711 \times 10^7$	0.79
f	$8.1 \pm 0.2$	$1.4 \pm 0.2$	$1.485 \times 10^7$	0.63

que celui de la force d'Archimède. Pour comparer les résultats numériques à l'expérience, une estimation précise de la variation de la densité avec la température et la concentration,  $\rho_c(T)$ , est nécessaire. La relation retenue pour l'étude de l'eau pure ( $C = 0$ ) est celle citée par Weast et Astle [19]:

$$\rho_0(T) = \frac{b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 + b_4 T^4 + b_5 T^5}{1 + b_6 T^6}, \quad (3)$$

où les coefficients  $b_i$  ont les valeurs suivantes:

$$b_0 = 999.83952$$

$$b_1 = 16.945176$$

$$b_2 = -7.9870401 \times 10^{-3}$$

$$b_3 = -46.170461 \times 10^{-6}$$

$$b_4 = 105.56302 \times 10^{-9}$$

$$b_5 = -280.54253 \times 10^{-12}$$

$$b_6 = 16.879850 \times 10^{-3}.$$

La détermination de  $\rho_c(T)$  pour les solutions de faibles fractions massiques de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  ( $\leq 2\%$ ) est basée sur l'équation de Masson (E-An-Zen [20]) où  $\rho_0(T)$  est donnée par (3) (voir appendice). Nous avons validé cette méthode en l'appliquant à des solutions aqueuses de  $\text{NaCl}$ : la température du maximum de densité calculée pour différentes concentrations a été comparée aux données de Josberger et Martin [18], et l'accord est très satisfaisant (voir Sun *et al.* [15]).

Exprimées en fonction des variables adimensionnées suivantes:

$$\mathbf{V} = \frac{H}{v} \mathbf{v}^*, \quad x = x^*/H, \quad z = z^*/H$$

$$\theta = \frac{(T - T_2)}{(T_1 - T_2)},$$

les équations de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement du fluide incompressible sont:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{V} - \nabla P + \frac{gH^3}{v^2} \frac{\rho_c(T(x, z)) - \rho_R}{\rho_R} \mathbf{k}, \quad (6)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur unitaire selon l'axe vertical,  $g$  la gravité,  $H$  la hauteur du liquide dans la cavité et  $v$  la viscosité cinématique.  $\rho_R$  est une densité de référence du fluide de l'ordre de la densité moyenne, dans l'intervalle imposé par les températures de paroi. L'ensemble des équations couplées est résolu par une méthode de volumes finis, utilisant la technique proposée par Patankar [21]. Les équations de conservation sont intégrées sur les volumes de contrôle définis par le maillage d'espace. Les équations intégrées sont ensuite discrétisées en utilisant un schéma hybride. Les équations discrètes qui résultent de chaque équation de conservation sont résolues par une procédure de double balayage (ADI). Une stratégie de faux transitoire est utilisée pour réduire le temps de calcul puisque l'on cherche l'état stationnaire. Le couplage pression-vitesse est résolu par une procédure itérative de correction de la pression (algorithmes SIMPLE ou SIMPLEX). Un maillage irrégulier  $81 \times 81$  est utilisé dans ces calculs pour une meilleure précision.

### 3.1. Comparaison de la forme des cellules

Les résultats des simulations correspondant aux expériences a et d sont représentées par les Figs. 3 (lignes de courant) et 4 (isothermes). Les lignes de courant des Figs. 3(a) et (d) (eau pure et solution aqueuse de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ) sont à comparer aux visualisations des Figs. 2(a) et (d) et révèle un bon accord qualitatif sur les structures d'écoulement. Du point de vue quantitatif, simulations et expériences s'accordent sur un paramètre essentiel: la hauteur relative de la petite cellule. Cependant, une différence visible sur la forme exacte (largeur) de la petite cellule est à signaler, en particulier pour l'eau pure: ce problème est déjà souligné dans le travail de Seki *et al.* [4] qui l'attribuent à un défaut d'adiabaticité des parois horizontales. Nous avons effectué des tests numériques complémentaires afin d'interpréter ces différences. Il a été tenu compte par exemple des gains de chaleur par la surface supérieure (flux imposé estimé à 5% du flux total échangé), ou de la conduction de la chaleur par la paroi inférieure (supposée parfaitement conductrice): les résultats obtenus ne permettent pas d'expliquer ce désaccord.

Le montage utilisé est caractérisé par le fait que la surface supérieure du liquide est libre, contrairement aux montages expérimentaux de Seki *et al.* [4] ou

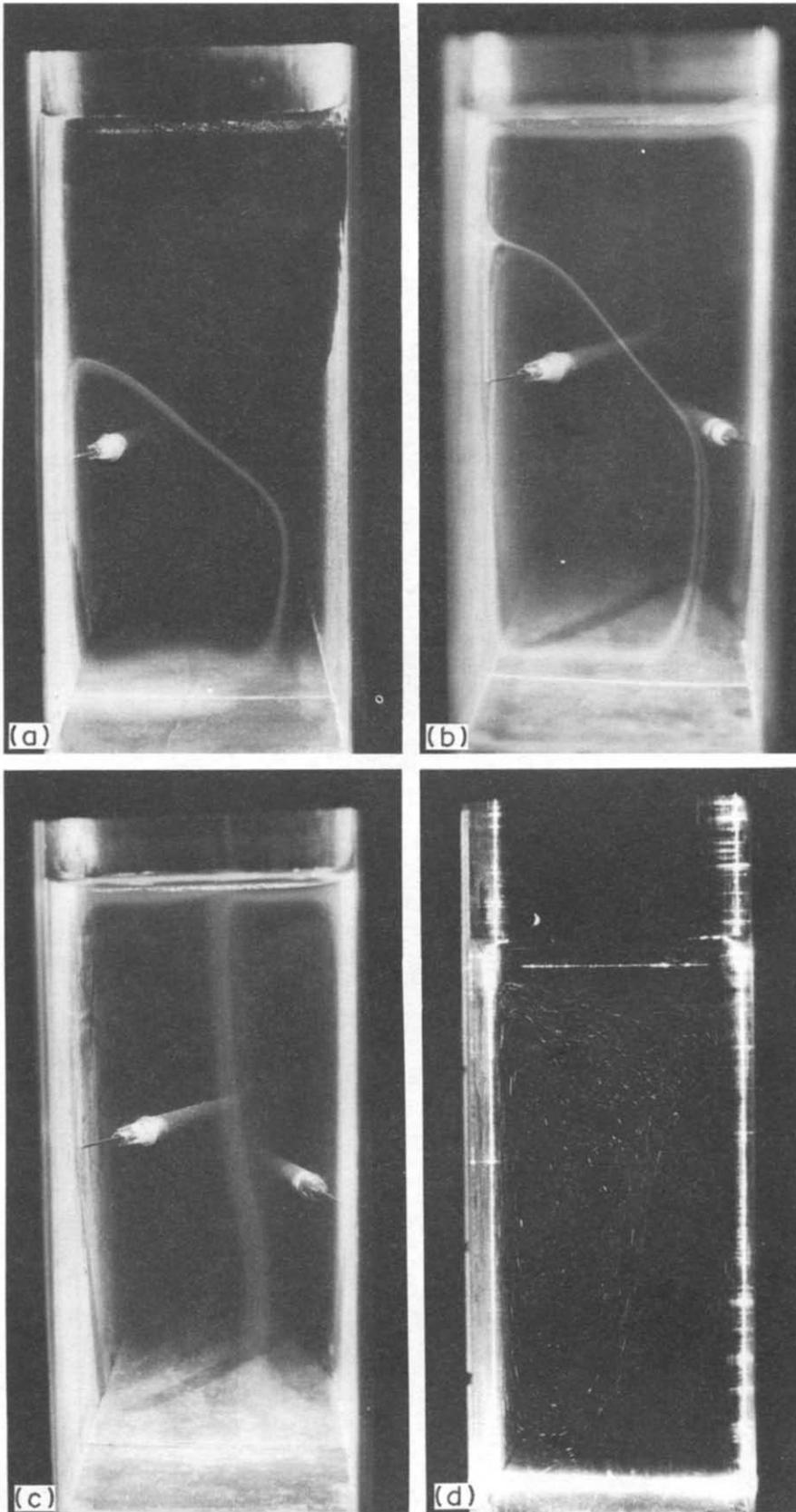


FIG. 2. Structures d'écoulement (observations expérimentales): (a) à (c) eau pure (expériences a, b, c), (d)  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  solution aqueuse ( $C = 0.5\%$ ).

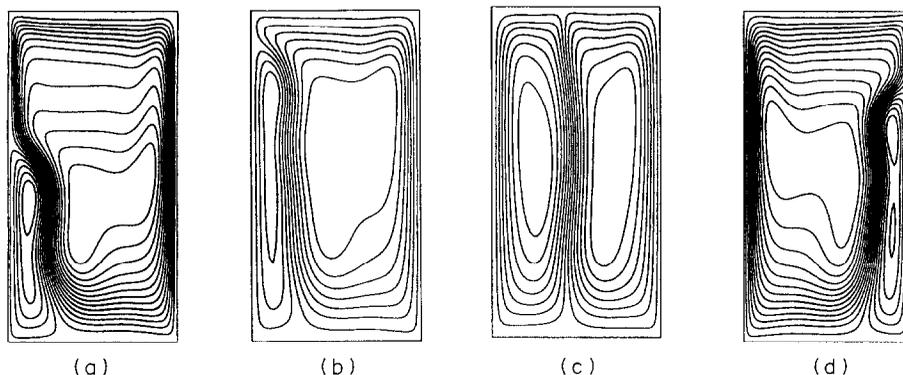


FIG. 3. Lignes de courant (simulations numériques) : (a) à (c) eau pure (expériences a, b, c), (d)  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  solution aqueuse ( $C = 0.5\%$ ).

d'Inaba et Fukuda [5]. La comparaison des résultats numériques pour une condition de glissement et une condition d'adhérence à cette paroi montre que ceci n'a pas d'influence sur la forme des cellules. Par ailleurs, la variation de la viscosité du fluide avec la température dans la gamme considérée ne semble pas être en cause, puisque la hauteur relative de la petite cellule est correcte. L'influence de la variation de  $\rho$  sur la diffusivité thermique dans l'équation de l'énergie (5) pourrait être à l'origine de cet effet, mais nous n'avons pas introduit cette variation dans nos calculs.

3.2. Comparaison des profils de température

Les profils de température calculés et mesurés sont comparés sur la Fig. 5(a) pour l'eau pure et 5(b) pour la solution aqueuse de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ . Le désaccord sur la largeur de la petite cellule est à nouveau visible sur les profils de température, particulièrement pour l'eau pure. On remarque en revanche le bon accord obtenu sur les profils de température dans la cellule la plus

large. Les isothermes calculés par la simulation des expériences a et d sont données sur les Figs. 4(a) et (b). Comme on peut le prévoir, la partie du fluide qui est au fond de l'enceinte est à la température  $T_M$  du maximum de densité.

On a comparé dans cette section les résultats numériques aux mesures expérimentales. Le bon accord sur les aspects essentiels du phénomène lié au maximum de densité nous permet de procéder à une étude paramétrique, sur la base des simulations numériques concernant les structures des écoulements (Section 4) et le transfert de chaleur (Section 5).

4. ANALYSE DE LA STRUCTURE D'ÉCOULEMENT

Cette partie est consacrée à l'influence des conditions opératoires sur la structure de l'écoulement et sur l'importance relative des deux cellules contrarotatives. Il s'agit de déterminer la variation de la hauteur relative de la petite cellule en fonction des

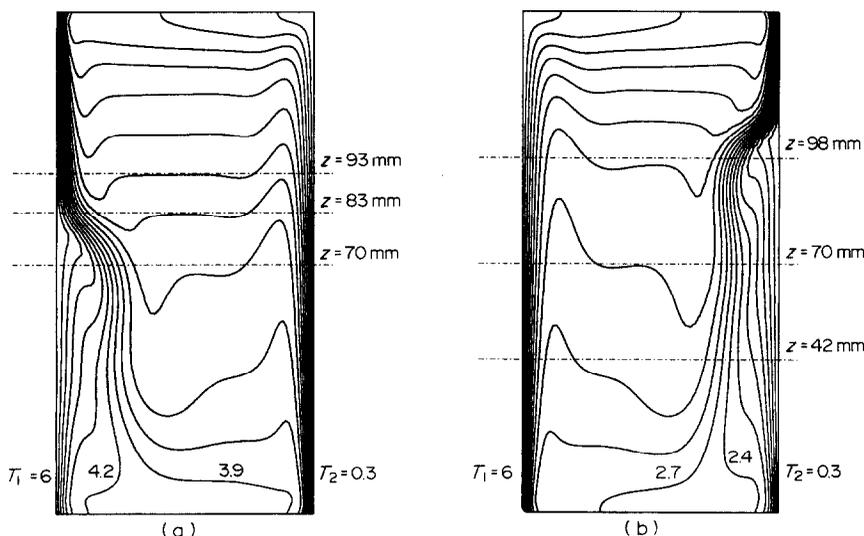


FIG. 4. Isothermes (0.3 C entre deux isothermes). (a) Simulation numérique de l'expérience a. (b) Simulation numérique de l'expérience d.

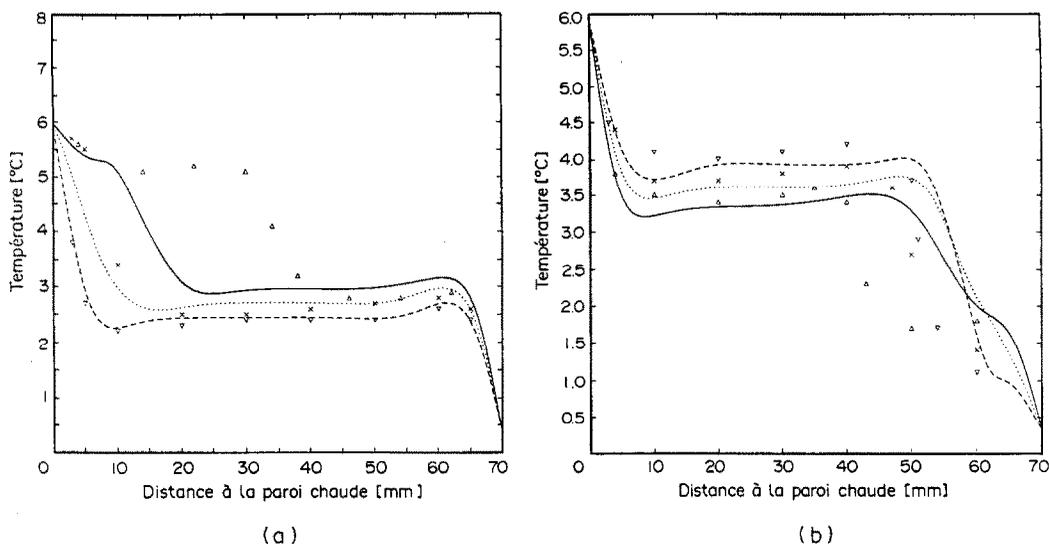


FIG. 5. Profils de température mesurés et calculés à différents niveaux de la cellule.

(a) Expérience a :	Hauteur (mm)	Numérique	Expérimental
	70	—	Δ
	83	····	×
	93	- - -	▽
(b) Expérience d :	Hauteur (mm)	Numérique	Expérimental
	42	—	Δ
	70	····	×
	98	- - -	▽

paramètres du problème, essentiellement la géométrie et les conditions aux limites thermiques. Les différents points à analyser dans cette section sont donc l'influence du rapport de forme (hauteur et largeur de la cavité), des écarts de température imposés de chaque côté, et de la température du maximum de densité. Signalons que toutes ces simulations sont réalisées pour des parois horizontales adiabatiques et rigides.

4.1. Influence du rapport de forme

Les caractéristiques des essais numériques sont résumées dans le Tableau 2. Pour des conditions limites fixées ( $T_1 = 6^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 0.3^\circ\text{C}$ ), on fait varier successivement la hauteur à largeur constante ( $L = 0.07$  m), puis la largeur à hauteur constante ( $H = 0.07$  m).

On a fait tout d'abord varier le rapport de forme de 1 à 3, en conservant la largeur de la cavité: le

Tableau 2. Influence du rapport de forme,  $T_1 = 6^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 0.3^\circ\text{C}$

L (mm)	H (mm)	A	$\overline{Nu}$
70.0	70	1	8.10
	140	2	14.14
	210	3	19.29
17.5	70	4	7.52
35.0		2	8.03
105.0		2/3	8.13

nombre de Grashof construit sur la hauteur varie. Les lignes de courant correspondant aux trois essais réalisés sont représentées sur les Figs. 6(a) ( $A = 3$ ), (b) ( $A = 2$ ) et (c) ( $A = 1$ ). On constate que la hauteur relative de la petite cellule,  $h$ , est indépendante du rapport de forme ( $h/H \approx 0.75$ ). Le rapport

$$Gr/A^3 = \frac{gL^3 \Delta\rho}{v^2 \rho_R}$$

est conservé dans ces essais: en d'autres termes, la hauteur relative de la petite cellule est invariante si le nombre de Grashof construit sur la largeur est constant.

Si on fixe à présent la hauteur de liquide ( $H = 0.07$  m) en faisant varier la largeur de l'enceinte de sorte que  $A$  varie de 2/3 à 4, c'est le nombre de Grashof construit sur la hauteur qui est conservé (Tableau 2). Les résultats sont représentées sur les Figs. 7(a) ( $A = 4$ ), (b) ( $A = 2$ ), (c) ( $A = 1$ ) et (d) ( $A = 2/3$ ), où on ne fait figurer que la ligne de séparation ( $\psi = 0$ ) entre les deux cellules, ce qui permet de visualiser plus clairement la taille respective des cellules. Comme dans les essais précédents, la hauteur relative de la petite cellule est invariante.

On peut de plus voir sur la Fig. 7 que l'influence du rapport de forme de la cavité sur l'épaisseur de la petite cellule n'est sensible qu'aux valeurs élevées de  $A$ .

Ces résultats montrent que les paramètres qui contrôlent la hauteur relative de la petite cellule sont liés essentiellement aux conditions thermiques.

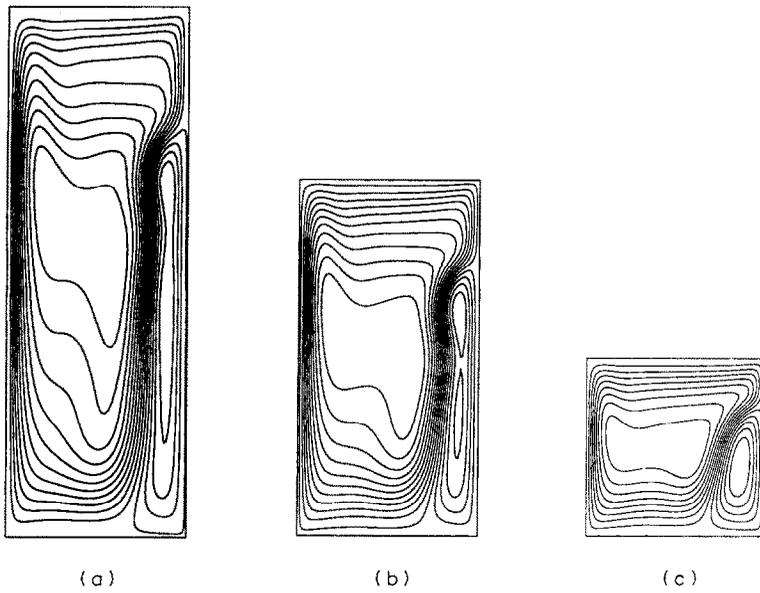


FIG. 6. Influence de la hauteur de liquide sur la hauteur relative des cellules (a)  $A = 3$ , (b)  $A = 2$  et (c)  $A = 1$ .

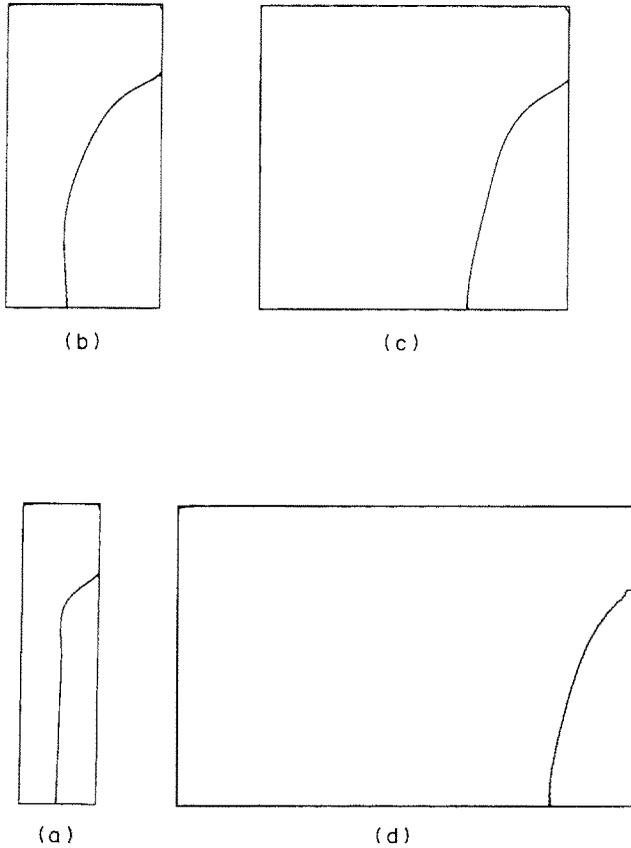


FIG. 7. Influence de la largeur de la cavité sur la hauteur relative des cellules (a)  $A = 4$ , (b)  $A = 2$ , (c)  $A = 1$  et (d)  $A = 2/3$ .

Tableau 3. Influence des températures imposées à la cavité à  $\delta = \Delta T_{\min}/\Delta T_{\max}$  constant ( $H = L = 0.07$  m)

$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	$\overline{Nu}$	$\delta$	$h/H$
a-6.0	0.3	8.10	0.78	0.84
b-6.0	0.0	7.48	0.69	0.76
a-4.3	1.45	5.31	0.78	0.84
b-4.3	1.3	4.94	0.69	0.76

C'est l'influence de ces conditions sur la structure des écoulements que nous analysons dans la section suivante.

#### 4.2. Influence des conditions aux limites thermiques

La variation relative de densité qui induit l'écoulement dans chacune des cellules est directement liée aux températures de paroi, et plus précisément aux écarts entre  $T_M$  et les températures de parois ( $\Delta T_1 = T_1 - T_M$  et  $\Delta T_2 = T_M - T_2$ ): comme nous l'avons vérifié expérimentalement dans la Section 3, la température sur la ligne de séparation des deux cellules est celle du maximum de densité.

Pour établir l'influence des écarts de température sur la hauteur de la petite cellule, on procède à deux séries d'essais numériques, où on modifie la valeur des écarts de température, tout en conservant leur rapport (Tableau 3). Nos résultats montrent qu'on obtient la même hauteur relative des deux cellules contrarotatives, pour une valeur donnée du rapport des écarts de température de part et d'autre du maximum de densité.

Ce résultat étant acquis, il reste à déterminer la relation entre la hauteur relative de la petite cellule et le rapport des écarts de température imposés dans la cavité. Pour cela, on fait varier l'écart de température du côté froid, en gardant constante la température de paroi chaude. Les résultats obtenus avec la solution à 0.5% de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  et l'eau pure sont résumés respectivement dans les Tableaux 4 et 5. La petite cellule se trouve du côté de la paroi qui est à la température la plus proche de  $T_M$  (écart de température le plus faible). Dans le cas de l'eau, le maximum de densité est atteint à  $T_M = 3.98^\circ\text{C}$ . La petite cellule va se trouver du côté de la paroi chaude ( $T_1 = 6^\circ\text{C}$ ) tant que  $T_2 < 2^\circ\text{C}$ . Par contre, la solution de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  à 0.5% présente un maximum de densité à  $T_M = 2.63^\circ\text{C}$ , et donc la petite

Tableau 5. Influence de  $\Delta T_{\min}/\Delta T_{\max}$  sur  $h/H$  (eau pure)

$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	$H$ (mm)	$L$ (mm)	$\overline{Nu}$	$h/H$
6	0.30			16.18	0.60
6	1.70			10.09	0.92
6	1.90	140	70	8.76	1.0
6	1.95			8.59	1.0
6	2.00			8.45	0.98
8	2.00			16.98	0.49
6	0.30	210	70	9.04	0.6
9	0.00	140	40	16.07	0.85

cellule va se trouver du côté de la paroi froide ( $T_2 = 0.3^\circ\text{C}$ ) tant que  $T_2 \geq -0.7^\circ\text{C}$ . Les résultats numériques montrant l'influence des écarts de température sur la géométrie des deux cellules sont représentés sur la Fig. 8(a) pour la solution et sur la Fig. 8(b) pour l'eau pure. Comme il a été signalé plus haut, on peut remarquer sur ces résultats l'extrême sensibilité du système aux variations des températures de consigne lorsqu'on se trouve en présence de deux cellules symétriques: on voit sur la Fig. 8(b) comment la petite cellule change de côté pour une différence de température de l'ordre du dixième de  $^\circ\text{C}$ .

Sur la Fig. 9, on représente la hauteur relative de la petite cellule en fonction du rapport des écarts de température. Les points expérimentaux, relevés avec une précision de  $0.2^\circ\text{C}$  sur les mesures de températures, sont représentés avec leurs barres d'erreur. Cette figure rassemble les résultats de tous les essais (eau et solution) et montre que la hauteur relative de la petite cellule est bien corrélée au rapport des écarts de température de part et d'autre de  $T_M$ :

$$\frac{h}{H} \cong \frac{\min(\Delta T_1, \Delta T_2)}{\max(\Delta T_1, \Delta T_2)} = \frac{\Delta T_{\min}}{\Delta T_{\max}} = \delta. \quad (7)$$

Il est à remarquer que cette corrélation s'applique aussi bien aux résultats numériques qu'aux résultats expérimentaux. Cette corrélation s'explique par la symétrie de la courbe  $\rho(T)$  par rapport à  $T_M$ . Dans tous les essais, les variations de densité sont calculées par rapport au maximum de densité. Les résultats précédents concernent soit l'eau pure, soit la solution à 0.5% en masse de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ : on les complète par des calculs pour des solutions de fraction massique égale à 0.45% et 0.55% (Tableau 6), réalisés pour les mêmes conditions de température ( $T_1 = 6^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 0.3^\circ\text{C}$ ) que précédemment. On trouve que la hauteur relative de la petite cellule est corrélée au rapport des écarts de température à mieux que 10%.

## 5. TRANSFERT DE CHALEUR

La section précédente s'intéressait à la taille relative des deux cellules contrarotatives. On considère maintenant l'influence de la structure d'écoulement sur le

Tableau 4. Influence de  $\Delta T_{\min}/\Delta T_{\max}$  sur  $h/H$ , solution à 0.5% ( $H = L = 0.07$  m)

$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	$\overline{Nu}$	$h/H$
6	0.0	7.48	0.85
6	0.3	7.95	0.76
6	0.5	8.28	0.69
6	1.0	8.87	0.49
6	1.3	9.16	0.36
6	2.0	9.74	0.1

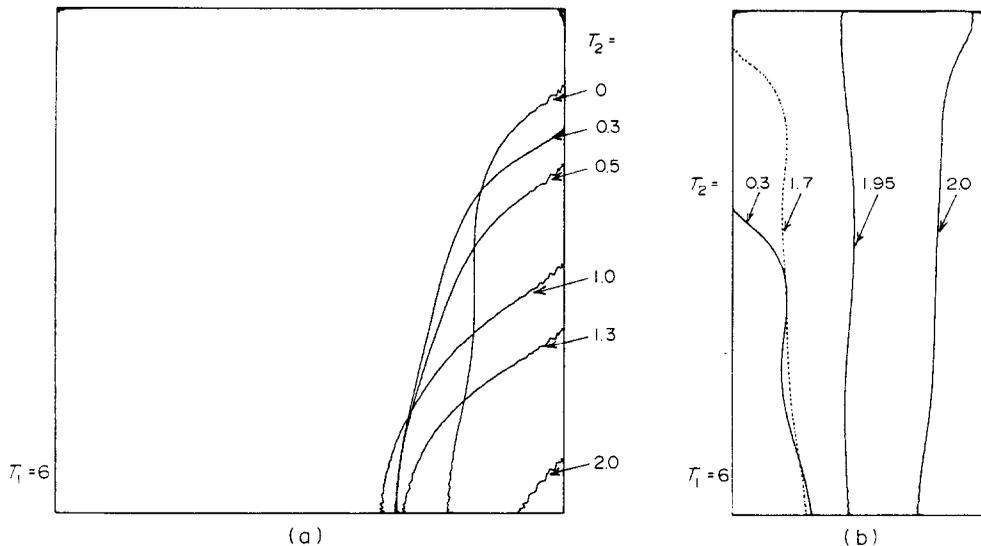


FIG. 8. Influence de l'écart de température sur la hauteur relative des cellules (a) solution Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>; (b) eau.

transfert global d'énergie aux parois de la cavité. Cette influence est mise en évidence sur la Fig. 10, qui présente les résultats d'observation et la simulation numérique de l'expérience e (Tableau 1).

Dans cette expérience, la paroi froide à  $T_2 = 0^\circ\text{C}$  est constituée d'une couche verticale de glace, d'épaisseur initiale  $l = 0.03$  m, située dans la cavité, entre le fluide et l'échangeur froid. Lorsque l'échelon de température est appliqué à l'échangeur chaud ( $T_1$ ), le transfert d'énergie par convection naturelle à la paroi froide contribue à fondre la glace. On sait que la vitesse de fusion est une fonction directe du flux de chaleur local à la paroi (Gobin [22], Bénard *et al.* [23]): la déformation de la couche de glace (position du front de fusion) permet par conséquent de visualiser la répar-

titution du transfert de chaleur à cette paroi. La visualisation de l'écoulement par plan laser et le profil de la paroi de glace obtenues par l'expérience e apparaissent sur la Fig. 10(a). La simulation numérique de cette expérience conduit aux lignes de courant et à la répartition de transfert de chaleur adimensionné le long de la paroi froide (nombre de Nusselt local) représentées respectivement sur les Figs. 10(b) et (c). On retrouve le bon accord déjà constaté sur la hauteur de la petite cellule entre les résultats de calcul et l'observation expérimentale. On voit clairement sur la Fig. 10 que le transfert de chaleur est partiellement inhibé par la présence de la petite cellule. On montre aisément que, pour une valeur donnée de l'écart de température entre parois ( $\Delta T = T_1 - T_2$ ), le transfert de chaleur est d'autant plus faible que la taille relative des cellules est comparable, c'est-à-dire que la température du maximum de densité est au centre de l'intervalle. Nous vérifions par le calcul les constatations faites dans les études antérieures de Seki *et al.* [4], Inaba et Fukuda [5] ou Lin et Nansteel [7]:

1. pour une valeur donnée de  $\Delta T$ , l'échange de chaleur est minimal lorsque la température du maximum de densité partage l'intervalle en deux parties égales (cas 'symétrique':  $\Delta T_1 = \Delta T_2$ ); ce cas limite correspond au cas où chaque cellule occupe la moitié de la cavité (deux cellules identiques),

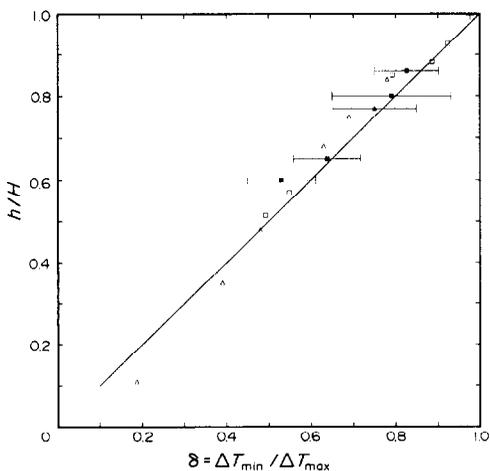


FIG. 9. Hauteur relative des deux cellules en fonction du rapport des écarts de température. Eau pure: □ numérique, ■ expérimental. Solution à 0.5%: △ numérique, ▲ expérimental.

Tableau 6. Variation de  $T_M$  par la concentration ( $T_1 = 6$  C,  $T_2 = 0.3$  C,  $A = 1$ )

C (%)	$T_M$ (°C)	$\overline{Nu}$
0.45	2.76	7.45
0.5	2.63	8.10
0.55	2.50	8.48

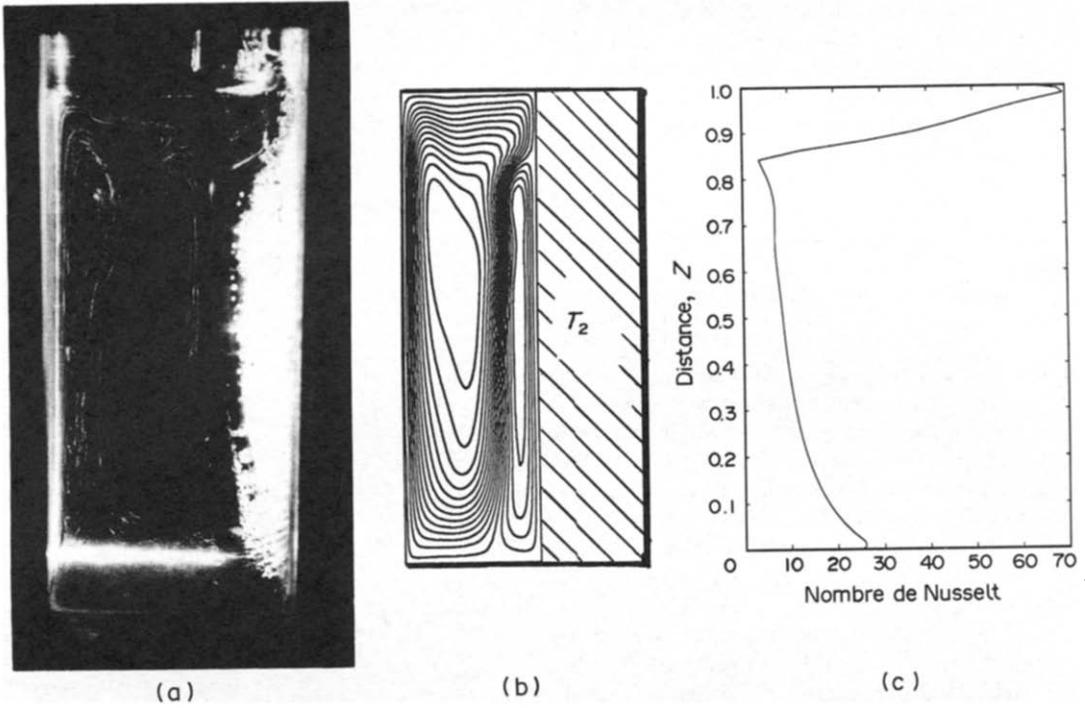


FIG. 10. Expérience e: fusion de la glace solide à la paroi froide. (a) Visualisation des écoulements. (b) Lignes de courant calculées. (c) Répartition du nombre Nusselt à la paroi froide.

2. l'échange est maximal lorsque la température du maximum de densité est en dehors de l'intervalle  $T_1 - T_2$  (cas 'monotone':  $\Delta T_1 \leq 0$  ou  $\Delta T_2 \geq 0$ ); ce cas correspond à la situation où une seule cellule occupe tout l'espace.

Le but de cette section est de définir les paramètres du problème permettant de caractériser l'échange de chaleur global dans la cavité. Dans le cas classique de l'approximation de Boussinesq, où on suppose que la densité  $\rho$  varie linéairement avec la température, le paramètre de référence est le nombre de Rayleigh construit sur la différence de température entre parois ( $\Delta T$ ). L'analyse des lois d'échelle permet d'établir qu'en régime laminaire et pour  $Pr > 1$ , le transfert de chaleur par convection naturelle (le nombre de Nusselt global à la paroi) est de l'ordre de

$$\left( \frac{gH^3 \Delta\rho}{\alpha\nu \rho_R} \right)^{1/4}$$

(Bejan [1]). Dans le cas de l'eau, dans la zone de variation linéaire de la densité, on obtient par exemple la corrélation suivante, proposée par Emery et Chu [24]:

$$\overline{Nu} = 0.28 Ra^{0.25}. \quad (8)$$

Dans la situation que nous considérons dans cette étude, il faut déterminer quel est le paramètre adimensionné équivalent au nombre de Rayleigh pour caractériser le problème, et sur quel écart de température de référence le construire. Nous avons vu

précédemment que l'effet de la variation de  $\rho$  est symétrique par rapport au maximum de densité; pour simplifier l'analyse, on admettra donc par la suite que l'expression de la densité de l'eau ou de la solution est une fonction quadratique de la température:

$$\rho(T) = \rho_M(1 - \gamma(T - T_M)^2), \quad (1')$$

ce qui permet de caractériser la loi de variation par le seul paramètre  $\gamma$  ( $\gamma = 8 \times 10^{-6} \text{C}^{-2}$ ) si l'on choisit la température du maximum comme température de référence (et  $\rho_R = \rho_M$ ).

Les observations précédentes ayant montré que l'échange de chaleur dans la grande cellule est celui qui domine le transfert d'énergie dans la cavité, le paramètre du problème est le terme source de l'équation de Navier-Stokes (équation (6)):

$$\frac{gH^3 \Delta\rho}{\nu^2 \rho_R}$$

pour la grande cellule. On définit ainsi un nombre de Rayleigh modifié:  $Ra^* = (g\gamma H^3/\nu\alpha)(\Delta T_{\max})^2$ , construit sur la hauteur totale de la cavité et sur l'écart de température maximal ( $\Delta T_{\max} = \text{Max}(\Delta T_1, \Delta T_2)$ ). Ce nombre de Rayleigh permet de caractériser le système jusque pour le cas limite  $\Delta T_{\min} = 0$ : alors  $\Delta T_{\max} = T_1 - T_2$  et une seule cellule se développe dans la cavité.

La quantité  $\Delta T_{\max}$  n'est cependant pas suffisante pour décrire le problème: il faut aussi prendre en compte le paramètre  $\delta$  défini dans la section 4,  $\delta = (\Delta T_{\min}/\Delta T_{\max})$ , pour donner une indication sur la

distribution des écarts de température imposés entre les parois et la température du maximum de densité. La valeur de  $\delta$  varie entre 0, si la température de l'une des parois est proche du maximum, et 1, si  $T_M$  est au milieu de l'intervalle de température entre parois.

Les observations ci-dessus suggèrent les hypothèses suivantes :

1. l'échange de chaleur à la paroi est proportionnel à  $Ra^{*0.25}$ ,
2. le transfert de chaleur est proportionnel à une fonction d'atténuation  $A(\delta)$  :  $Nu \sim A(\delta)(Ra^*)^{0.25}$ .

On fait l'hypothèse supplémentaire que  $A(\delta)$  est une fonction linéaire. Comme nous l'avons vu plus haut, l'échange est maximal pour  $\delta = 0$ , et on pose  $A(0) = 1$ . On a remarqué par ailleurs que le nombre de Nusselt passe par un minimum pour  $\delta = 1$  : pour déterminer la valeur  $A(1) = A_{\min}$  de cette fonction, on utilise le fait que la valeur minimale de  $\overline{Nu}$  à  $\Delta T$  fixé est environ la moitié de la valeur à  $\delta = 0$ , comme le montrent les résultats de Seki *et al.* [4], de Inaba et Fukuda [5] et de Lin et Nansteel [7]. Dans le cas modèle où l'on suppose que la densité varie linéairement avec la même pente de part et d'autre du maximum, on établit aisément que les nombres de Nusselt calculés sur un  $\Delta T$  donné pour le cas 'monotone' et pour le cas 'symétrique' sont dans un rapport  $2^{5/4}$ . On peut donc accepter le rapport 2 comme représentatif de l'ordre de grandeur de l'atténuation entre les deux cas limites. On identifie alors  $A_{\min} = \sqrt{2}/2$  et la fonction  $A(\delta)$  s'écrit :

$$A(\delta) = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\delta. \quad (9)$$

La Fig. 11 regroupe l'ensemble des résultats concernant le transfert de chaleur sur un graphe  $(\overline{Nu}/A(\delta), Ra^*)$ . Lorsque les résultats sont obtenus au voisinage du maximum de densité, les grandeurs ont le sens décrit ci-dessus. Lorsqu'il s'agit de résultats obtenus dans la zone linéaire (approximation de Boussinesq classique), on prend  $A(\delta) = 1$ , et  $Ra$  prend la valeur habituelle du nombre de Rayleigh. C'est le cas de la corrélation de Emery et Chu (équation (8)), représentée en trait continu. On voit que cette représentation permet de corréler sur une même droite, avec une faible dispersion, l'ensemble des résultats numériques que nous avons obtenus dans ce travail, aussi bien pour l'eau que pour la solution de  $Na_2CO_3$  à 0.5%, et les résultats au voisinage du maximum de densité de l'eau obtenus expérimentalement par Seki *et al.* [4] ou par Inaba et Fukuda [5], ainsi que les résultats numériques de Lin et Nansteel [7]. En plusieurs points, les résultats numériques présentés sur la figure se superposent : il s'agit de résultats obtenus avec le même  $\Delta T_{\max}$  (même  $Ra^*$ ) et différentes valeurs de  $\delta$  : la quantité  $\overline{Nu}/A(\delta)$  est invariante. On remarque que ces résultats concordent de façon satisfaisante avec la corrélation expérimentale proposée par Lankford et Bejan :  $\overline{Nu} = 0.203Ra^{*0.28}$ , en convection natu-

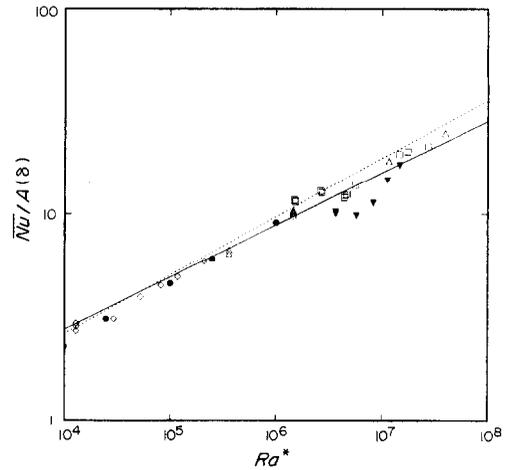


FIG. 11. Echange d'énergie en fonction du nombre de Rayleigh. Corrélations expérimentales (variation linéaire de la densité) : — Emery et Chu [24]; ··· Lankford et Bejan [10]. Mesures expérimentales avec effet du maximum de densité : ▼ Seki *et al.* [4]; ● Inaba et Fukuda [5]. Résultats numériques : ◇ Lin et Nansteel [6] (présent travail) : □ Eau pure, △ solution à 0.5% en masse de  $Na_2CO_3$ .

relle dans la zone de variation linéaire de  $\rho$ , pour de l'eau soumise à un écart de température de 4°C. De fait, un calcul de régression montre que l'ensemble des résultats suit une évolution en  $Ra^{*0.28}$ , les résultats numériques pris séparément étant corrélés avec une pente légèrement inférieure (plus proche de l'exposant 1/4 théorique) et les résultats expérimentaux de leur côté suivant une tendance de pente un peu plus élevée.

La corrélation s'applique sur une très large gamme de nombres de Rayleigh et on constate que les approximations faites pour exprimer la fonction d'atténuation liée à la présence du maximum de densité dans la gamme de température considérée s'intègrent dans le calcul du coefficient de la corrélation. Notons enfin pour le cas dit 'monotone' le raccordement entre la loi quadratique (nombre de Rayleigh modifié  $Ra^*$ ) et la loi linéaire (nombre de Rayleigh classique) : on calcule dans cette gamme le nombre de Rayleigh équivalent par :

$$Ra = \frac{g\gamma H^3}{\nu\alpha} \beta_{(T_{\text{moy}})} \Delta T \frac{\rho(T_{\text{moy}})}{\rho_{\text{moy}}}.$$

La loi linéaire sera choisie lorsque la quantité  $\rho(T_{\text{moy}})/\rho_{\text{moy}}$  est suffisamment proche de 1, ce qui correspond pour l'eau à  $T_{\text{moy}} \approx 10^\circ\text{C}$ .

## 6. CONCLUSION

Cette étude numérique et expérimentale s'intéresse à la convection naturelle thermique dans le cas où le fluide de travail présente un maximum de densité dans la zone de température considérée. Ce phénomène est abordé dans le cas de l'eau et de solutions salines : la structure d'écoulement est caractérisée par la présence

de deux cellules contrarotatives, dont l'importance comparée est indiquée par la hauteur relative de la cellule la plus petite.

On montre que les techniques classiques de visualisation (injection de colorant, tomographie laser) permettent d'observer l'effet de forces d'Archimède de très faible intensité. La sensibilité extrême de l'écoulement aux variations de densité dans le cas symétrique permet de confirmer la précision des températures imposées expérimentalement aux parois et la validité des simulations numériques.

Sur la base du bon accord observé entre les visualisations et le calcul des lignes de courant, la simulation numérique est utilisée pour une étude paramétrique permettant de corréliser la hauteur relative de la petite cellule avec le rapport des écarts de température de part et d'autre du maximum de densité, et cela aussi bien dans le cas de l'eau que dans celui de solutions de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  de faible concentration. On met par ailleurs en évidence dans ce travail des groupements adimensionnés permettant d'établir une corrélation unique pour le transfert d'énergie dans la cavité, à la fois pour le cas où l'approximation de Boussinesq est vérifiée, et pour celui où un maximum de densité se présente dans la zone de température considérée.

L'étude des solutions aqueuses de  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  à faible concentration de soluté montre que l'influence des variations de température et de concentration sur la densité est du même ordre de grandeur. En conséquence, on peut s'attendre à des structures complexes lors de la fusion ou la solidification en présence de solutions aqueuses: la convection naturelle thermosolutale dans le bain liquide (Thompson et Szekely [25, 26]) peut être affectée par la présence du maximum de densité de la solution dans la zone du changement de phase.

*Remerciements*—La partie expérimentale de ce travail a été réalisée avec le soutien du CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) et du programme PIRMAT du CNRS. Les calculs ont été effectués sur le VP200 du centre de calcul du CNRS (CIRCE) sur une attribution de la Direction SPI.

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. Bejan, *Convection Heat Transfer*. Wiley, New York (1984).
2. J. Grant, The liquid state densities of metals: alloys and intermetallic compounds, Ph.D. Thesis, Syracuse University, New York (1968).
3. A. Watson, The effect of inversion temperature on the convection of water in an enclosed rectangular cavity, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **25**, 423–446 (1972).
4. N. Seki, S. Fukusako and H. Inaba, Free convection heat transfer with density inversion in a confined rectangular vessel, *Wärme- und Stoffübertragung* **11**, 145–156 (1978).
5. H. Inaba and T. Fukuda, An experimental study of natural convection in an inclined rectangular cavity filled with water at its density extremum, *J. Heat Transfer* **106**, 109–115 (1984).
6. D. S. Lin and M. W. Nansteel, Natural convection in a vertical annulus containing water near the density maximum, *J. Heat Transfer* **109**, 899 (1987).
7. D. S. Lin and M. W. Nansteel, Natural convection heat transfer in a square enclosure containing water near its density maximum, *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 2319–2329 (1987).
8. T. L. Spatz, D. Poulikakos and M. J. Kazmierczak, High Rayleigh number experiments in a horizontal layer of water around its density maximum, *J. Heat Transfer* **111**, 578 (1989).
9. L. Robillard and P. Vasseur, Convective response of a mass of water near  $4^\circ\text{C}$  to a constant cooling rate applied on its boundaries, *J. Fluid Mech.* **118**, 123–141 (1982).
10. K. E. Lankford and A. Bejan, Natural convection in a vertical enclosure filled with water near  $4^\circ\text{C}$ , *J. Heat Transfer* **108**, 755 (1986).
11. M. W. Nansteel, K. Medjani and D. S. Lin, Natural convection of water near its density maximum in a rectangular enclosure, *Phys. Fluids* **30**(2), 312–317 (1987).
12. G. N. Ivey and P. F. Hamblin, Convection near the temperature of maximum density for high Rayleigh number, low aspect ratio, rectangular cavities, *J. Heat Transfer* **111**, 100 (1989).
13. P. Vasseur and L. Robillard, Transient natural convection heat transfer in a mass of water cooled through  $4^\circ\text{C}$ , *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 1195–1205 (1980).
14. P. Greisman, On upwelling driven by the melt of ice shelves and tidewater glaciers, *Deep Sea Res.* **26A**, 1051–1065 (1979).
15. L. Y. Sun, R. Bennacer, Y. Toguyeni, D. Gobin and C. Bénard, Experiments on natural convection in aqueous solutions: influence of the density maximum on phase change, *ASME Winter Annual Meeting*, Session on Fundamentals of Phase Change, Anaheim, 8–13 November (1992).
16. S. L. Braga and R. Viskanta, Transient natural convection of water near its density extremum in a rectangular cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer* **35**, 861–875 (1992).
17. B. Gebhart and J. Mollendorf, Buoyancy flows in water under conditions in which density extrema may arise, *J. Fluid Mech.* **89**(4), 673–707 (1978).
18. E. G. Josberger and S. Martin, A laboratory and theoretical study of the boundary layer adjacent a vertical melting ice wall in salt water, *J. Fluid Mech.* **111**, 439–473 (1981).
19. R. C. Weast and M. J. Astle, *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press Inc., Boca Raton, Florida (1980).
20. E.-An-Zen, Partial molar volumes of some salts in aqueous solutions, *Geochimica et Cosmochimica Acta* **12**, 103–122 (1957).
21. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York (1980).
22. D. Gobin, Changement d'état solide-liquide: évolution temporelle du couplage entre la convection naturelle dans la phase solide. Etude numérique et expérimentale, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie (1984).
23. C. Bénard, D. Gobin and F. Martinez, Melting in rectangular enclosures: experiments and numerical simulations, *J. Heat Transfer* **107**, 794–803 (1985).
24. A. Emery and N. C. Chu, Heat transfer across vertical layers, *J. Heat Transfer* **87**, 110–116 (1965).
25. M. E. Thompson and J. Szekely, Mathematical and physical modelling of double diffusive convection of aqueous solutions crystallizing at a vertical wall, *J. Fluid Mech.* **187**, 409–433 (1988).
26. M. E. Thompson and J. Szekely, Density stratification due to counterbuoyant flow along a vertical crystallization front, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 1021–1036 (1989).

## APPENDICE

### Notations

L'indice (1) est relatif à l'eau ( $\text{H}_2\text{O}$ ).

L'indice (2) est relatif au soluté.

$C$  fraction massique,  $m_2/(m_1 + m_2)$

$m_0$  concentration molaire,  $n_1/V$

$m_i$  masse de l'espèce  $i$

$M_i$  masse molaire de l'espèce  $i$

$n_i$  nombre de moles de l'espèce  $i$

$N_2$  fraction molaire,  $n_2/(n_1 + n_2)$

$V$  volume de la solution

$V_1^0$  volume partiel molaire de l'eau à dilution infinie

$\beta_T^0$  coefficient d'expansion thermique de l'eau,

$(-1/\rho_0)(\partial\rho_0/\partial T)$

$\phi^0$  volume molaire apparent à dilution infinie

$\phi$  volume molaire apparent de la solution,  $V - n_1 V_1^0/n_2$

$\rho_0$  densité de l'eau

$\rho_c$  densité de la solution.

Cet appendice détaille le calcul de la température du maximum de densité de la solution comme fonction de la fraction massique du soluté (diagramme  $(T_M - C)$ ) pour les solutions aqueuses de carbonate de sodium ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ) pour  $C$  compris dans l'intervalle [0–1.5%]. Cette expression est obtenue comme suit :

Par définition de  $\phi$  :

$$\phi = \frac{1000(\rho_c(T) - \rho_0(T))}{m_0 \rho_0(T)} + \frac{M_2}{\rho_0(T)}. \quad (\text{A.1})$$

L'équation empirique de Masson (E-An-Zen [20]) donne :

$$\phi = \phi_0 + \frac{\partial\phi}{\partial m_0^{1/2}} m_0^{1/2} = \phi_0 + \frac{\partial\phi}{\partial N_2^{1/2}} N_2^{1/2}. \quad (\text{A.2})$$

(A.1) et (A.2) conduisent à l'expression finale de  $\rho_c(T)$  :

$$\rho_c(T) = \rho_0(T) + \frac{m_0}{1000} \left[ M_2 - \left( \phi_0 + \frac{\partial\phi}{\partial N_2^{1/2}} N_2^{1/2} \right) \rho_0(T) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Notons que  $\rho_0$ ,  $\phi_0$  et  $\partial\phi/\partial N_2^{1/2}$  dépendent seulement de la température : cependant  $\rho_c$  est une fonction à la fois de la

température et de la fraction massique  $C$ . Pour une fraction massique donnée, la température du maximum de densité résulte de :

$$\left( \frac{\partial\rho_c}{\partial T} \right)_C = 0,$$

c'est à dire :

$$\beta_T^0 + f \beta_T^0 \left[ M_2 - \left( \phi_0 + \frac{\partial\phi}{\partial N_2^{1/2}} \right) \rho_0 \right] + f \left[ \frac{d\phi_0}{dT} - N_2^{1/2} \left( \rho_0 \frac{d}{dT} \left( \frac{\partial\phi}{\partial N_2^{1/2}} \right) - \beta_T^0 \rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial N_2^{1/2}} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$N_2 = \frac{CM_1}{CM_1 + (1-C)M_2},$$

$$f = \frac{C}{1000(1-C)M_2}.$$

Cette expression peut être réduite à une équation du second degré puisque :

(i) pour l'eau :  $M_1 = 0.018 \text{ kg mole}^{-1}$ , et  
 $\beta_T^0 = (1.562T - 6.34)10^{-5} (\text{°C}^{-1})$

(ii) pour  $\text{Na}_2\text{CO}_3 - \text{H}_2\text{O}$  (E-An-Zen [20]) :  $M_2 = 0.106 \text{ kg mole}^{-1}$ , et

$$\phi_0 = -15.1 + 0.5T, \quad T \in [0, 10^\circ\text{C}]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial N_2^{1/2}} = -1.032T + 113.71, \quad T \in [0, 10^\circ\text{C}].$$

En résolvant l'équation du second degré et en ne retenant que la solution physiquement réaliste (la température inférieure à  $4^\circ\text{C}$ ), on obtient la valeur de  $T_M$ .

## FLOW STRUCTURE AND HEAT TRANSFER BY NATURAL CONVECTION NEAR THE DENSITY MAXIMUM

**Abstract**—Thermal natural convection is considered in water and aqueous solutions. These fluids exhibit a density maximum in the temperature range of interest, and the experimental and numerical analyses show that the non-linear density variation in the buoyancy term affects the flow structure and the heat transfer by natural convection. The flow is visualized using classical techniques (dye injection, laser tomography) adapted to the observation of flows induced by very small driving forces: it is shown that the density maximum creates a complex structure of two contra-rotating cells of unequal importance. The problem is solved numerically using a finite volume method: the good agreement with the experimental measurements allows for a parametric study based on numerical simulations. The analysis of the heat transfer characteristics leads to a general correlation which can be used in both the linear and the non-linear Boussinesq situations.